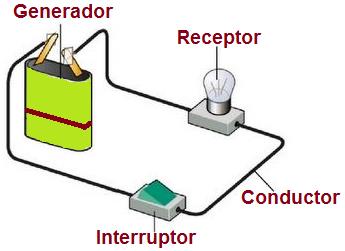
**Tema 4.1. Densidad Conjunta y Marginal-Caso Continuo.**

**Motivación del tema**. Como sabemos la corriente en un circuito al que se suministra un voltaje y que tiene una resistencia , están relacionadas por la ecuación . En general, y son imposibles de medirlas exactamente, en una medición obtendremos un valor y en otra medición otro valor. Por eso es más conveniente ver a y como variables aleatorias entonces también es una variable aleatoria y podemos estudiar sus propiedades a través de la **función de densidad conjunta** del voltaje y la resistencia. Por ejemplo,



* la probabilidad de que el voltaje tome valores entre y y la resistencia tome valores entre y se calcula con la integral doble

* el valor esperado de la corriente se calcula como:

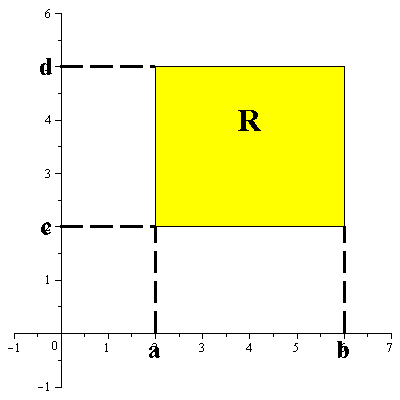
Evidentemente se observa que en este tema hay que saber calcular integrales dobles

**Definición 1.** La función de densidad conjunta de 2 variables aleatorias y es una función que tenga las 3 propiedades:

* , una región del plano



**Observación 1.** Como vamos a necesitar calcular integrales dobles damos una primera fórmula para calcularlas sobre regiones rectangulares:



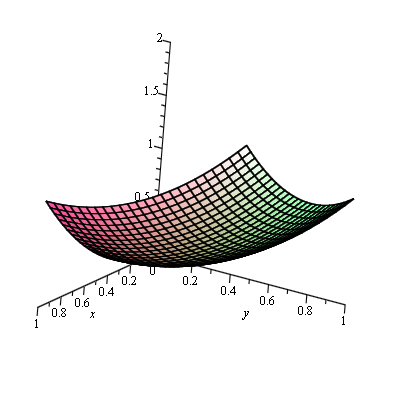
**Ejemplo 1.** Sean y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta

Determine (a) la constante , (b) , (c).

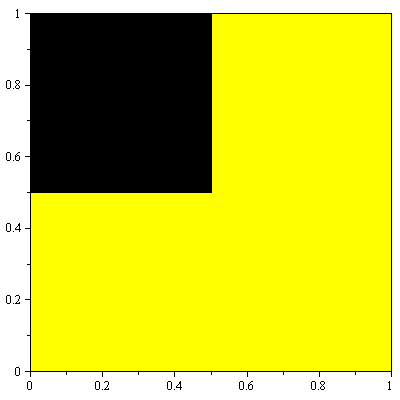
**Solución.** Para (a) utilizamos la propiedad 3 de la definición 1

Integrando primero con respecto a y después con respecto a obtenemos:

Con este valor la gráfica de la función de densidad tiene la siguiente forma:

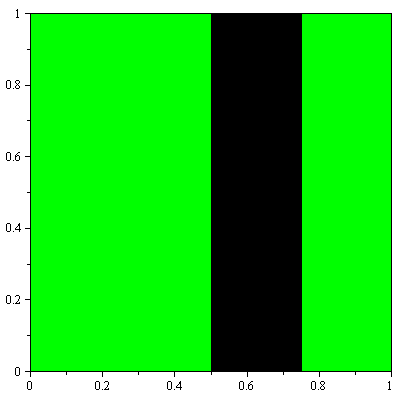


Para (b) la región de integración está en la esquina superior izquierda



Entonces la probabilidad se calcula utilizando la segunda propiedad de la definición 1

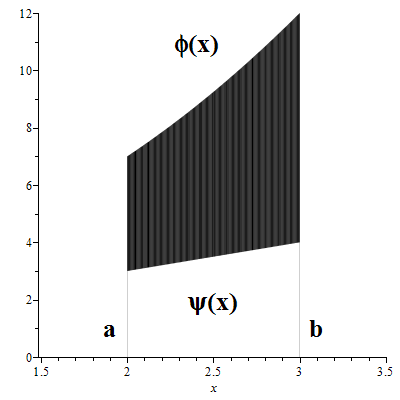
Para (c) la región de integración es la de color negro



Entonces la probabilidad se calcula otra vez utilizando la segunda propiedad de la definición 1

**Observación 2.** Extendemos nuestros procedimientos para calcular integrales dobles sobre regiones más generales:

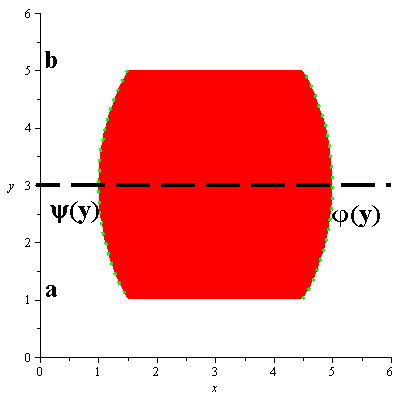
* La integral doble sobre una región del tipo I,



se calcula como:

**Observe que si la primera integral se hace con respecto a , los límites de integración deben ser funciones de , una función arriba y otra abajo . Los límites de integración de la segunda integral se buscan sobre el eje y son y . Es útil trazar una línea vertical para sacar las funciones**  y .

* Si la región de integración es del tipo II,

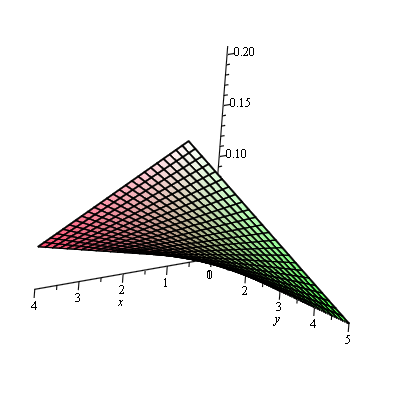


la integral se calcula como:

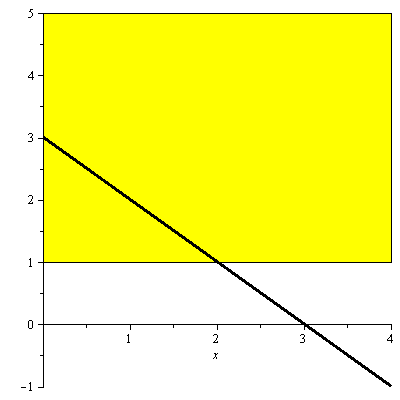
**Observe que si la primera integral se hace con respecto a , los límites de integración deben ser funciones de , una función a la derecha y otra a la izquierda . Los límites de integración de la segunda integral se buscan sobre el eje y son y . Es útil trazar una línea horizontal para sacar las funciones**  y .

**Ejemplo 2.** Encuentre si la función de densidad conjunta es

**Solución.** La gráfica de la función de densidad es



Ahora dibujamos la región rectangular y la recta



La región correspondiente a la desigualdad es la parte de abajo, pues al sustituir y por las coordenadas de un punto que esté abajo, por ejemplo , la desigualdad se cumple pues obtenemos . Esto no sucede si tomamos un punto arriba de la recta, por ejemplo , en este caso obtenemos la desigualdad falsa .

Entonces la probabilidad que buscamos se obtiene integrando la función de densidad sobre la región que está debajo de la recta y dentro del rectángulo. Esa región es del tipo I donde la curva que está arriba es y la que está abajo es , mientras que el intervalo donde se toman estas funciones es . El valor 2 se obtiene resolviendo la ecuación , la intersección entre las dos rectas. Así la probabilidad buscada es

**Definición 2. Funciones de Densidad Marginales.** Sean y variables aleatorias con función de densidad conjunta , definimos

* la función de densidad marginal de como

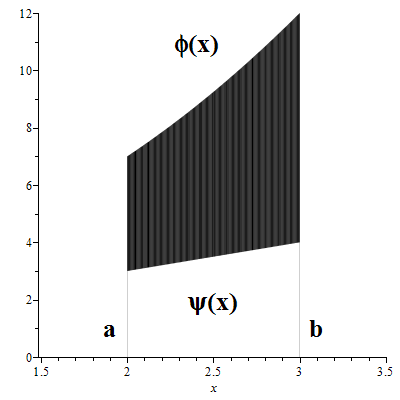
Observe que como se integra con respecto a los limites de integración son funciones de

* la función de densidad marginal de como:

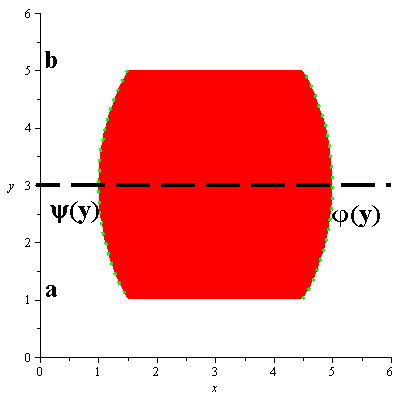
Observe que como se integra con respecto a los limites de integración son funciones de .

**Observación 3.** Para la función de densidad marginal de necesariamente la región de integración se debe escribir como funciones de y es de ayuda trazar líneas verticales para sacar los límites de integración. Así tenemos

Además la función de densidad marginal de debe quedar en términos de solamente.



Para la función de densidad marginal de necesariamente la región de integración se debe escribir como funciones de y es de ayuda trazar líneas horizontales para sacar los límites de integración. Así tenemos:

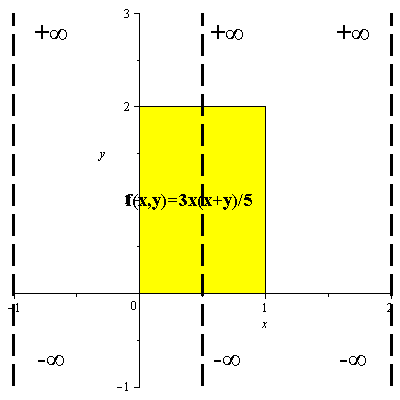


Además la función de densidad marginal de debe quedar en términos de solamente.

**Ejemplo 3.** Si la función de densidad conjunta de y es

encuentre y .

**Solución.** Para dibujamos la región donde es diferente de cero y como vamos a integrar con respecto a trazamos líneas verticales que vamos moviendo de izquierda a derecha para fijo

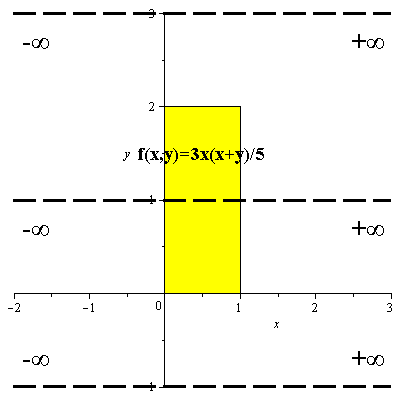


entonces

* Para ,
* Para ,
* Para ,

Entonces queda como:

Para dibujamos la región donde es diferente de cero y como vamos a integrar con respecto a trazamos líneas horizontales que vamos moviendo de abajo hacia arriba.



entonces

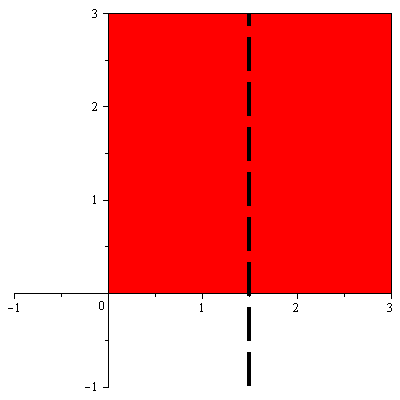
* Para ,
* Para ,
* Para ,

Entonces queda como:

**Ejemplo 4.** Sea

Encuentre las funciones de densidad marginales.

**Solución.** Como la función de densidad de densidad conjunta es diferente de cero sólo en el primer cuadrante entonces la marginal de es diferente de cero para y vale:

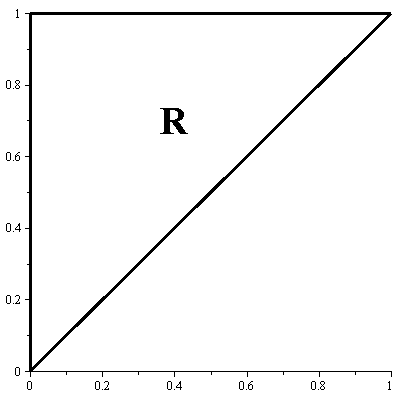


De la misma forma la marginal de es diferente de cero para y vale:

**Ejercicios.**

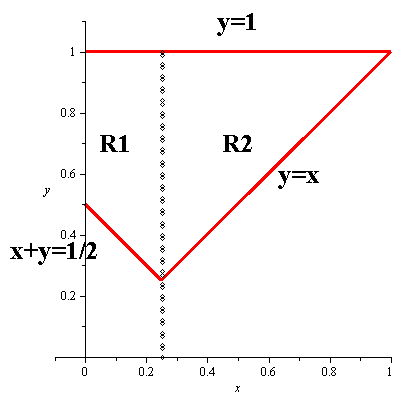
1. La función de densidad conjunta de y es
2. Encuentre , (b) encuentre , (c) encuentre , (d) encuentre la densidad marginal , si una función de densidad debe ser positiva, ¿por qué sale negativo el resultado? Compruebe que , (e) encuentre la densidad marginal , (f) ¿son independientes y , es decir, ¿se cumple que ?

Ayuda: La función es diferente de en la región triangular



Para la marginal de sólo debemos calcular la integral de a . Mientras que para la marginal de se debe integrar de a .

Para calcular la región de integración es



Se debe calcular la integral sobre y .

Respuesta: (a) , (b) , (c) , (d) , (e) 1, (f) no son independientes.